

### 第3节 空间向量的应用：求距离 (★★★)

#### 内容提要

本节归纳用空间向量求距离的有关问题，常见的有下面两类：

1. 求点到直线的距离：如图1，设  $P$  为直线  $l$  外一点，点  $A$  在直线  $l$  上， $\boldsymbol{u}$  是直线  $l$  的单位方向向量，则

$$\text{点 } P \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } PQ = \sqrt{AP^2 - (\overline{AP} \cdot \boldsymbol{u})^2}.$$

注：当两直线平行时，两直线间的距离等于其中一条直线上任意一点到另一直线的距离。

2. 求点到平面的距离：如图2， $P$  为平面  $\alpha$  外一点， $A$  为平面  $\alpha$  上任意一点， $\boldsymbol{n}$  为平面  $\alpha$  的一个法向量，

$$\text{则点 } P \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离 } d = \frac{|\overline{PA} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

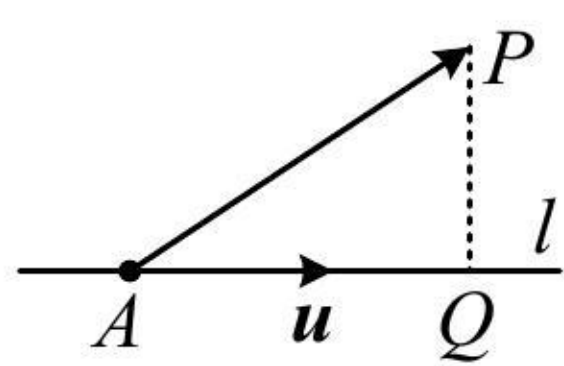


图1

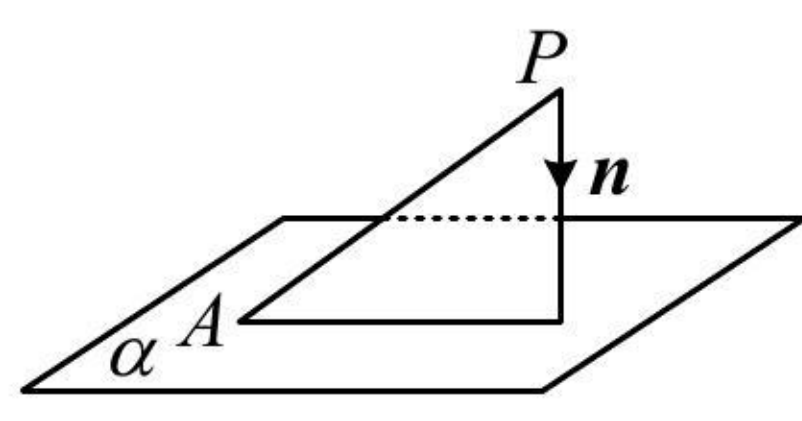


图2

注：当线面平行或面面平行时，直线到平面的距离，平行平面间的距离都可按点到平面的距离来算。

#### 典型例题

【例题】(多选) 在棱长为1的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $E$  为线段  $DD_1$  的中点， $F$  为线段  $BB_1$  的中点，

则下列说法中正确的是 ( )

(A) 点  $A_1$  到直线  $B_1E$  的距离是  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(B) 直线  $FC_1$  到直线  $AE$  的距离是  $\frac{\sqrt{30}}{5}$

(C) 点  $A_1$  到平面  $AB_1E$  的距离是  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) 直线  $FC_1$  到平面  $AB_1E$  的距离是  $\frac{1}{3}$

解析：涉及的距离都可直接代内容提要公式算，故建系处理，

如图建系，则  $A(0,0,0)$ ， $A_1(0,0,1)$ ， $B_1(1,0,1)$ ， $E(0,1,\frac{1}{2})$ ， $F(1,0,\frac{1}{2})$ ，

A项， $\overline{A_1B_1} = (1,0,0)$ ， $\overline{B_1E} = (-1,1,-\frac{1}{2})$ ，直线  $B_1E$  的一个单位方向向量为  $\boldsymbol{u} = \frac{\overline{B_1E}}{|\overline{B_1E}|} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ ，

由内容提要1的公式，点  $A_1$  到直线  $B_1E$  的距离为  $\sqrt{A_1B_1^2 - (\overline{A_1B_1} \cdot \boldsymbol{u})^2} = \sqrt{1 - (-\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，故A项正确；

B项，观察发现  $FC_1 \parallel AE$ ，故两直线的距离可转化为点到直线的距离来算，点不妨取  $F$ ，

$\overline{AF} = (1,0,\frac{1}{2})$ ， $\overline{AE} = (0,1,\frac{1}{2})$ ，所以直线  $AE$  的一个单位方向向量  $\boldsymbol{v} = \frac{\overline{AE}}{|\overline{AE}|} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \overline{AE} = (0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ ，



从而点  $F$  到直线  $AE$  的距离为  $\sqrt{|\overrightarrow{AF}|^2 - (\overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{v})^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}$ , 故 B 项正确;

C 项, 算点到平面的距离, 可代内容提要第 2 点的公式, 先求平面  $AB_1E$  的法向量,

$$\overrightarrow{AB_1} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{AE} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right), \quad \text{设平面 } AB_1E \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x, y, z), \quad \text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = x + z = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases},$$

令  $x = 2$ , 则  $\begin{cases} y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$ , 所以  $\mathbf{n} = (2, 1, -2)$  是平面  $AB_1E$  的一个法向量,

又  $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$ , 所以点  $A_1$  到平面  $AB_1E$  的距离为  $\frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}$ , 故 C 项错误;

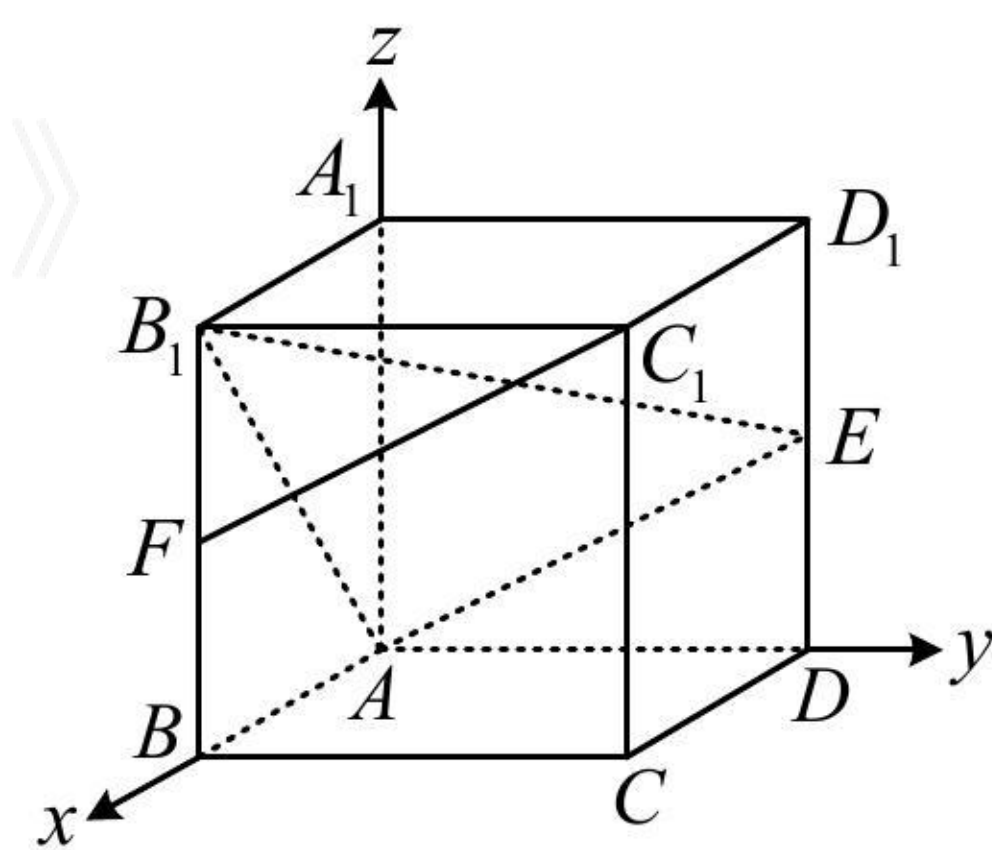
D 项, 由  $FC_1 \parallel AE$  可知  $FC_1 \parallel$  平面  $AB_1E$ , 故线面距离可按点到平面的距离来算,

前面已求得  $\overrightarrow{AF} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ , 平面  $AB_1E$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (2, 1, -2)$ ,

所以点  $F$  到平面  $AB_1E$  的距离为  $\frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{3}$ , 从而直线  $FC_1$  到平面  $AB_1E$  的距离为  $\frac{1}{3}$ , 故 D 项正确.

答案: ABD

《一数·高考数学核心方法》



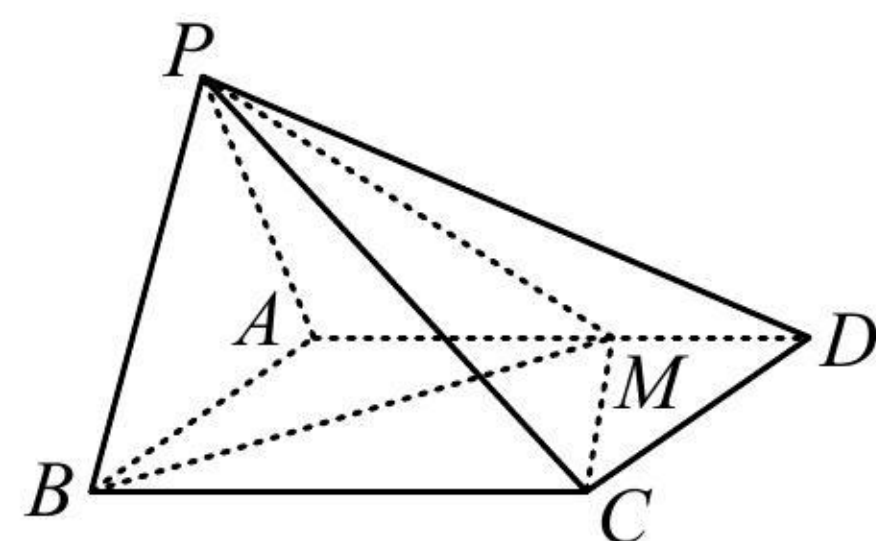
【总结】向量法计算空间距离, 熟悉有关公式即可, 都是流程化的操作, 所以本节只举一道例题.

### 强化训练

1. (2023·山西模拟·★★★) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  为矩形,  $PA = PB = \sqrt{5}$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 3$ ,  $M$  是棱  $AD$  上一点, 且  $AM = 2MD$ .

(1) 求点  $B$  到直线  $PM$  的距离;

(2) 求平面  $PMB$  与平面  $PMC$  的夹角余弦值.

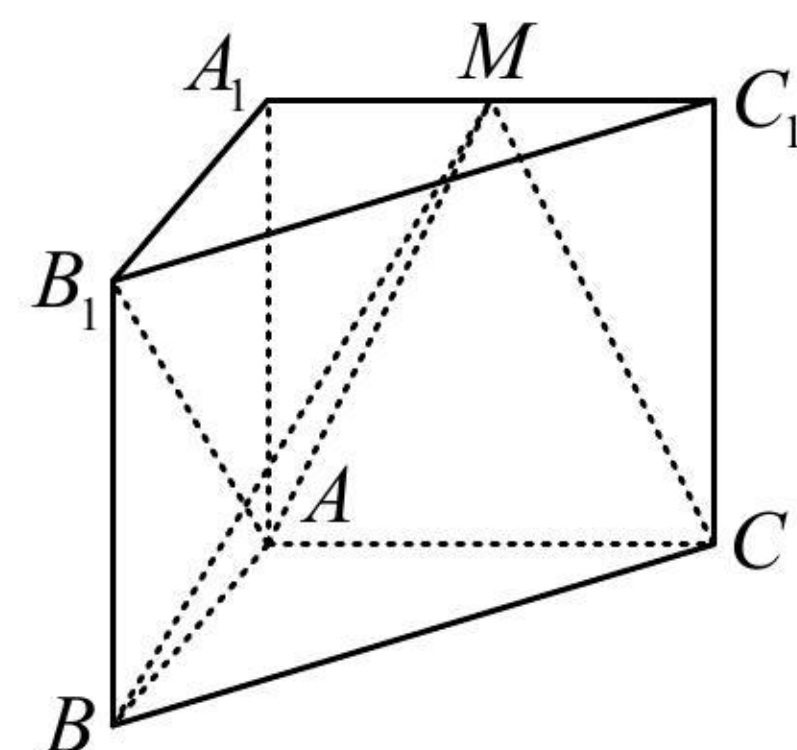




2. (2022 · 山东滕州模拟 · ★★★) 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB = AC = AA_1 = 1$ ,  $M$  为线段  $A_1C_1$  上一点.

(1) 求证:  $BM \perp AB_1$ ;

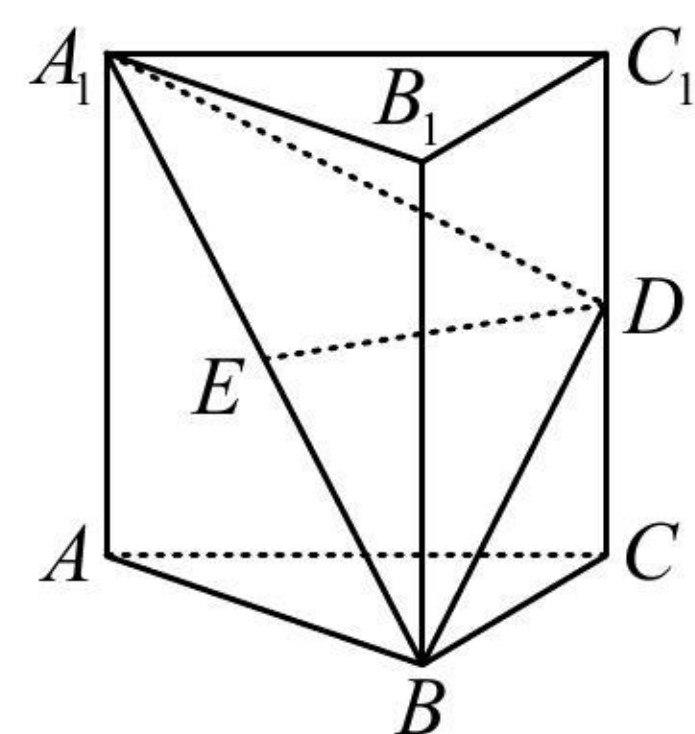
(2) 若直线  $AB_1$  与平面  $BCM$  所成的角为  $45^\circ$ , 求点  $A_1$  到平面  $BCM$  的距离.



3. (2023 · 陕西乾县模拟改 · ★★★) 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC = BC = AA_1$ ,  $D, E$  分别为  $CC_1, A_1B$  的中点.

(1) 证明:  $DE \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ;

(2) 若  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 2$ , 求点  $B_1$  到平面  $A_1BD$  的距离.



4. (2023·四川泸县模拟·★★★★) 如图, 在多面体  $ABCDE$  中,  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CDE$  都是边长为 2 的正三角形, 平面  $ABC \perp$  平面  $BCD$ , 平面  $CDE \perp$  平面  $BCD$ .

(1) 求证:  $AE \parallel BD$ ;

(2) 求点  $B$  到平面  $ACE$  的距离.

